

Quadratischer Lovelock-Tensor als Elektromagnetischer Spannungstensor

Thorsten Krechel

24. April 2005

Wir setzen den Spannungstensor des elektromagnetischen Feldes

$$T_{EM}{}^{a_1 a_2} = F^{a_1 b_1} F^{a_2}{}_{b_1} - \frac{1}{4} g^{a_1 a_2} F^{b_1 b_2} F_{b_1 b_2}, \quad (1)$$

wobei $F^{a_1 a_2}$ den elektromagnetischen Feldstärketensor darstellt, mit dem Tensor $\overset{2}{G}{}^{a_1 a_2} = \overset{2}{R}{}^{a_1 a_2} - \frac{1}{4} g^{a_1 a_2} \overset{2}{R}$ mit $\overset{2}{R}{}^{a_1 a_2} = R^{a_1 b_1 b_2 b_3} R^{a_2}{}_{b_1 b_2 b_3} + R R^{a_1 a_2} - 2R^{a_1 b_1} R^{a_2}{}_{b_1} - 2R^{a_1 b_1 a_2 b_2} R_{b_1 b_2}$ gleich, so dass

$$T_{EM}{}^{a_1 a_2} = \overset{2}{G}{}^{a_1 a_2} \quad (2)$$

ist. Diese Gleichung lässt sich vereinfachen zu:

$$F^{a_1 b_1} F^{a_2}{}_{b_1} = \overset{2}{R}{}^{a_1 a_2} \quad (3)$$

Suchen wir nun für (3) zentralsymmetrische Lösungen mit

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dq^{(0)2} + e^{2\beta} dq^{(1)2} + q^{(1)2} (dq^{(2)2} + \sum_{i=4}^n dq^{(i-1)2} \prod_{j=4}^n \sin(q^{(j-2)})^2), \quad (4)$$

dann erhalten wir daraus für ein elektrisches Feld, dass nur eine Radialkomponente $F_{(0)(1)}$ besitzt, die Lösung:

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{2} \log(1 + c r^{4-n} \sqrt{(b + a r^{-3+n})}) \quad (5)$$

mit $r = q^{(1)}$ und beliebig wählbaren Konstanten a, b, c . Das Quadrat des elektrischen Feldes lautet damit:

$$F_{(0)(1)} F^{(0)(1)} = -\frac{1}{2} b c^2 (-4+n) (-3+n)^2 (-2+n) r^{4-2n} \quad (6)$$

Suchen wir zusätzlich noch zentralsymmetrische Lösungen aus der Maxwell-Gleichung für das Vakuum, dass heißt mit

$$\mathcal{D}_{a_2} F^{a_1 a_2} = 0, \quad (7)$$

dann erhalten wir daraus für das Quadrat des elektrischen Feldes:

$$F_{(0)(1)} F^{(0)(1)} = -f r^{4-2n} \quad (8)$$

mit einer Konstanten f .

Wir erhalten für das elektrische Feld $F_{(0)(1)}$ aus beiden Gleichungen (3) und (7) eine r^{2-n} -Abhängigkeit, aber leider verschwindet Gleichung (6) für $n = 4$, denn sonst würde hier eine r^{-4} -Abhängigkeit für $F_{(0)(1)} F^{(0)(1)}$ stehen, was für eine elektrisch geladene Punktladung typisch ist.