Vielweltentaugliche Lagrange-Dichte aus Kombinationen des Elektromagnetischen Feldstärketensors

Thorsten Krechel

24. April 2005

Die Skalare

$$\overset{n}{J} = \begin{vmatrix} g^{a_1\,b_1} & \cdots & g^{a_1\,b_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{a_{2n}\,b_1} & \cdots & g^{a_{2n}\,b_{2n}} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{2\,l} F_{a_{2\,l-1}a_{2\,l}} F_{b_{2\,l-1}b_{2\,l}} \tag{1}$$

bestehen aus Kombinationen des Elektromagnetischen Feldstärketensors $F_{a_1 a_2}$, die jeweils unterhalb der Dimensionsanzahl $g^a{}_a < 2\,n$ verschwinden. Die ersten vier Skalare dieser Art, mit $J^{a_1 a_2} = F^{a_1 b_1} F^{a_2}{}_{b_1}$, ausgeschrieben lauten:

$$J = F_{b_1 b_2} F^{b_1 b_2} \tag{2}$$

$$\overset{2}{J} = J^2 - 2 J_{b_1 b_2} J^{b_1 b_2} \tag{3}$$

$$\overset{3}{J} = J^3 - 6 J_{b_1 b_2} J^{b_1 b_2} J + 8 J_{b_1 b_2} J^{b_1 b_3} J_{b_3}{}^{b_2} \tag{4}$$

$$\overset{4}{J} = J^4 - 12 J_{b_1 b_2} J^{b_1 b_2} J^2 + 32 J_{b_1 b_2} J^{b_3 b_2} J_{b_3}{}^{b_1} J + 12 J_{b_1 b_2} J^{b_1 b_2} J_{b_3 b_4} J^{b_3 b_4} - 48 J_{b_1 b_2} J^{b_1 b_4} J_{b_3 b_4} J^{b_3 b_2} \tag{5}$$

Mit diesen Skalaren lässt sich die folgende vielweltentaugliche Lagrange-Dichte aufbauen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{vmatrix} g^{a_1\,b_1} & \cdots & g^{a_1\,b_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{a_{2n}\,b_1} & \cdots & g^{a_{2n}\,b_{2n}} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{4\,l^2} F_{a_{2\,l-1}a_{2\,l}} F_{b_{2\,l-1}b_{2\,l}} \\ &= e^{\frac{1}{2} J - \frac{1}{4} J_{b_1 b_2} J^{b_1 b_2} + \frac{1}{6} J_{b_1 b_2} J^{b_1 b_3} J_{b_3}{}^{b_2} - \frac{1}{8} J_{b_1 b_2} J^{b_1 b_4} J_{b_3 b_4} J^{b_3 b_2} + \ldots} \\ &= 1 + \frac{1}{2} J + \frac{1}{8} \overset{2}{J} + \frac{1}{48} \overset{3}{J} + \frac{1}{384} \overset{4}{J} + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Aus der damit aufgebauten Wirkung $S = \int d^D q\, 2 \sqrt{g}\, \mathcal{L}$ ergibt die Variation nach den Feldvariablen $g_{a_1 a_2}$ umd A_{a_1}, indem alle auftretenden Variationen durch $\delta g_{a_1 a_2}$ und δA_{a_1} ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^D q\, 2\, \delta(\sqrt{g}\, \mathcal{L}) \\ &= \int d^D q \sqrt{g}\, (-4\, \mathcal{D}_{b_0} (\sum_{n=1}^{\infty} \begin{vmatrix} 0 & g^{a_0 b_1} & \cdots & g^{a_0 b_{2\,n-1}} \\ g^{a_1 b_0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & g^{a_{2\,n-2} b_{2\,n-1}} \\ g^{a_{2\,n-1} b_0} & \cdots & g^{a_{2\,n-1}\,b_{2\,n-2}} & 0 \end{vmatrix} \prod_{l=1}^{2\,n-1} \frac{1}{l} F_{a_l\,b_l}) \delta A_{a_0} \\ &\quad + (g^{a_0 b_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} g^{a_0 b_0} & g^{a_0 b_1} & \cdots & g^{a_0 b_{2\,n}} \\ g^{a_1 b_0} & g^{a_1 b_1} & \cdots & g^{a_1 b_{2\,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{a_{2\,n} b_0} & g^{a_{2\,n} b_1} & \cdots & g^{a_{2\,n} b_{2\,n}} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{4\,l^2} F_{a_{2\,l-1}\,a_{2\,l}} F_{b_{2\,l-1}\,b_{2\,l}}) \delta g_{a_0 b_0}) \end{aligned} \tag{7}$$