Vielweltentaugliche Relativitätstheorie

Thorsten Krechel

1 Einleitung

Wir werden hier relativistische Feldgleichungen kennen lernen, bei dem der gesamte Dimensionsbereich für eine beliebige Dimensionsanzahl ${g^{a_0}}_{a_0}$, aus Dimensionsbereichen bestehen kann, die unabhängig voneinander und orthogonal zueinander existierende abgeschlossene Systeme darstellen. Diese abgeschlossenen Systeme wollen wir Dimensionszellen nennen, die dadurch charakterisiert sind, dass die jeweils in einer Dimensionszelle wirkenden Felder, keine Wirkung auf Dimensionsbereiche außerhalb von dieser Dimensionszelle haben können. Zwischen verschiedenen Dimensionszellen besteht also keinerlei Wechselwirkung und der Wirkungsbereich der Felder in einer Dimensionszelle ist nur auf diese Dimensionszelle selbst beschränkt. Um dies zu erreichen werden wir divergenzfreie Tensoren einführen, die sich jeweils aus einer Variation herleiten lassen, so dass sich damit Feldgleichungen konstruieren lassen, die divergenzfrei sind, somit Erhaltungsgrößen darstellen, und aus dem Variationsprinzip folgen.
[Wir benutzen hier die Einsteinsche Summenkonvention, bei der über zwei gleiche Indizes summiert wird, von denen der eine als kovarianter Index unten und der andere als kontravarianter Index oben steht. Im folgenden bezeichnet $R_{a_1a_2a_3a_4}$ den Krümmungstensor, $R_{a_1a_2} = {R_{a_1b_1a_2}}^{b_1}$ den Ricci-Tensor, $R = {R_{b_1}}^{b_1}$ den Krümmungsskalar und $g_{a_1a_2}$ den metrischen Tensor. Ist q^{a_0} eine Koordinate, dann bezeichnet ∂_{a_0} die einfache Ableitung, und $\mathcal{D}_{a_0}$ die kovariante Ableitung nach dieser Koordinate. Für $\partial_{a_0}\partial_{a_1}$ schreiben wir $\partial_{a_0a_1}$.]

2 Divergenzfreie Tensoren

Die hier vorgestellten zweistufigen symmetrischen Tensoren sind divergenzfrei, dass heißt für einen solchen zweistufigen symmetrischen Tensor $\mathcal{T}^{a_0 b_0}$ ist $\mathcal{D}_{b_0}\mathcal{T}^{a_0 b_0} = 0$:

- Metrischer Tensor $g_{a_0 b_0}$
- Divergenzfreie Tensoren $\overset{n}{G}{}^{a_0 b_0}$, die den Krümmungstensor

$$\begin{aligned} R_{a_0 a_1 a_2 a_3} &= \frac{1}{2}(\partial_{a_1 a_3} g_{a_0 a_2} - \partial_{a_0 a_3} g_{a_1 a_2} + \partial_{a_0 a_2} g_{a_1 a_3} - \partial_{a_1 a_2} g_{a_0 a_3}) \\ &- \frac{1}{4} g^{b_1 b_2}((\partial_{a_2} g_{b_1 a_1} + \partial_{a_1} g_{b_1 a_2} - \partial_{b_1} g_{a_1 a_2})(\partial_{a_3} g_{b_2 a_0} + \partial_{a_0} g_{b_2 a_3} - \partial_{b_2} g_{a_0 a_3}) \\ &- (\partial_{a_3} g_{b_1 a_1} + \partial_{a_1} g_{b_1 a_3} - \partial_{b_1} g_{a_1 a_3})(\partial_{a_2} g_{b_2 a_0} + \partial_{a_0} g_{b_2 a_2} - \partial_{b_2} g_{a_0 a_2})) \end{aligned} \tag{1}$$

  in n-ter Potenz enthalten:

$$\overset{n}{G}{}^{a_0 b_0} = -\frac{1}{2\,n} \begin{vmatrix} g^{a_0 b_0} & \dots & g^{a_0 b_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{a_{2n} b_0} & \dots & g^{a_{2n} b_{2n}} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{2} R_{a_{2\,l-1} a_{2\,l} b_{2\,l-1} b_{2\,l}} \tag{2}$$

  Diese Tensoren verschwinden für die Dimensionsanzahl $g^{a_0}{}_{a_0} \leq 2\,n$. Für $g^{a_0}{}_{a_0} = 2\,n$ gibt es dabei noch eine besondere Beziehung zwischen den Skalaren

$$\overset{n}{R} = \begin{vmatrix} g^{a_1 b_1} & \dots & g^{a_1 b_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{a_{2n} b_1} & \dots & g^{a_{2n} b_{2n}} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{2} R_{a_{2\,l-1} a_{2\,l} b_{2\,l-1} b_{2\,l}} \tag{3}$$

  und den Tensoren

$$\overset{n}{R}{}^{a_0 b_0} = \overset{n}{G}{}^{a_0 b_0} + \frac{1}{2\,n} g^{a_0 b_0} \overset{n}{R}, \tag{4}$$

  für die die Beziehungen

$$\overset{n}{R}{}^{b_1}{}_{b_1} = \overset{n}{R} \tag{5}$$

  gelten, denn die Tensorn $\overset{n}{R}{}^{a_0 b_0}$ verschwinden für $g^{a_0}{}_{a_0} < 2\,n$, und es gilt:

$$\overset{n}{R}{}^{a_0 b_0} = \begin{cases} \frac{1}{2\,n}\, g^{a_0 b_0} \overset{n}{R} & \text{wenn } g^{a_0}{}_{a_0} = 2\,n, \\ 0 & \text{wenn } g^{a_0}{}_{a_0} < 2\,n \end{cases} \tag{6}$$

  Die ersten vier Tensoren $\overset{1}{G}{}^{a_1 a_2}$, $\overset{2}{G}{}^{a_1 a_2}$, $\overset{3}{G}{}^{a_1 a_2}$ und $\overset{4}{G}{}^{a_1 a_2}$ ausgeschrieben lauten:

  1. Für $n = 1$ (Einstein-Tensor):

$$G^{a_1 a_2} = R^{a_1 a_2} - \frac{1}{2} g^{a_1 a_2} R \tag{7}$$

  2. Für $n = 2$:

$$\overset{2}{G}{}^{a_1 a_2} = \overset{2}{R}{}^{a_1 a_2} - \frac{1}{4} g^{a_1 a_2} \overset{2}{R} \tag{8}$$

Mit:

$$\overset{2}{R}{}^{a_1a_2} = R^{a_1b_1b_2b_3} R^{a_2}{}_{b_1b_2b_3} + R\,R^{a_1a_2} - 2R^{a_1\,b_1} R^{a_2}{}_{b_1} - 2R^{a_1b_1a_2b_2} R_{b_1b_2} \tag{9}$$

Dieser Tensor lässt sich auch mit

$$\begin{aligned}
&\overset{2}{R}_{b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8} = \\
&\frac{1}{3}(R_{b_1b_4b_7b_8}R_{b_2b_3b_5b_6} - R_{b_1b_4b_6b_8}R_{b_2b_3b_5b_7} + R_{b_1b_4b_6b_7}R_{b_2b_3b_5b_8} \\
&- R_{b_1b_3b_7b_8}R_{b_2b_4b_5b_6} + R_{b_1b_3b_6b_8}R_{b_2b_4b_5b_7} - R_{b_1b_3b_6b_7}R_{b_2b_4b_5b_8} \\
&- R_{b_1b_3b_5b_8}R_{b_2b_4b_6b_7} + R_{b_1b_4b_5b_8}R_{b_2b_3b_6b_7} - R_{b_1b_4b_5b_7}R_{b_2b_3b_6b_8} \\
&+ R_{b_1b_4b_5b_6}R_{b_2b_3b_7b_8} + R_{b_1b_3b_5b_7}R_{b_2b_4b_6b_8} - R_{b_1b_3b_5b_6}R_{b_2b_4b_7b_8} \\
&+ R_{b_1b_2b_7b_8}R_{b_3b_4b_5b_6} - R_{b_1b_2b_6b_8}R_{b_3b_4b_5b_7} + R_{b_1b_2b_6b_7}R_{b_3b_4b_5b_8} \\
&+ R_{b_1b_2b_5b_8}R_{b_3b_4b_6b_7} - R_{b_1b_2b_5b_7}R_{b_3b_4b_6b_8} + R_{b_1b_2b_5b_6}R_{b_3b_4b_7b_8})
\end{aligned} \tag{10}$$

schreiben als:

$$\overset{2}{R}{}^{a_1a_2} = \overset{2}{R}{}^{a_1b_1b_2b_3a_2}{}_{b_1b_2b_3} \tag{11}$$

3. Für $n = 3$:

$$\overset{3}{G}{}^{a_1a_2} = \overset{3}{R}{}^{a_1a_2} - \frac{1}{6}\, g^{a_1a_2}\overset{3}{R} \tag{12}$$

Mit:

$$\begin{aligned}
\overset{3}{R}{}^{a_1a_2} &= 2\overset{2}{R}{}^{a_1a_2} R + R^{a_1a_2}(\overset{2}{R} - 2R^2) \\
&- 4(R^{a_1}{}_{b_1}\overset{2}{R}{}^{a_2b_1} + R^{a_2}{}_{b_1}\overset{2}{R}{}^{a_1b_1}) + 8R^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2b_1}R \\
&- 4R^{a_1b_1a_2b_2}\overset{2}{R}_{b_1b_2} + 4R^{a_1b_1a_2b_2}R_{b_1b_2}R - 8R^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2}{}_{b_2}R^{b_1b_2} \\
&+ 8R^{a_1b_1b_2b_3}R^{a_2b_4}{}_{b_2b_5}R^{b_5}{}_{b_1b_3b_4} + 2R^{a_1b_1b_2b_3}R^{a_2}{}_{b_1b_4b_5}R_{b_2b_3}{}^{b_4b_5} \\
&- 4R^{a_1b_1b_2b_3}R^{a_2b_4}{}_{b_2b_3}R_{b_1b_4} - 8R^{a_1b_1b_2b_3}R^{a_2}{}_{b_1b_2b_4}R_{b_3}{}^{b_4}
\end{aligned} \tag{13}$$

4. Für $n = 4$:

$$\overset{4}{G}{}^{a_1a_2} = \overset{4}{R}{}^{a_1a_2} - \frac{1}{8}\, g^{a_1a_2}\overset{4}{R} \tag{14}$$

Mit:

$$
\begin{aligned}
\overset{4}{R}{}^{a_1a_2} &= R^{a_1a_2}(\overset{3}{R} - 6R\,\overset{2}{R} + 6R^3) + 3\overset{2}{R}{}^{a_1a_2}(\overset{2}{R} - 2R^2) + 3\overset{3}{R}{}^{a_1a_2}R \\
&- 6(\overset{3}{R}{}^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2b_1} + \overset{3}{R}{}^{a_2}{}_{b_1}R^{a_1b_1}) + 24(\overset{2}{R}{}^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2b_1} + \overset{2}{R}{}^{a_2}{}_{b_1}R^{a_1b_1})R \\
&+ 12R^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2b_1}\overset{2}{R} - 36R^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2b_1}R^2 + 6R^{a_1b_1a_2b_2}R_{b_1b_2}(\overset{2}{R} - 2R^2) \\
&- 24(\overset{2}{R}{}^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2}{}_{b_2} + \overset{2}{R}{}^{a_2}{}_{b_1}R^{a_1}{}_{b_2})R^{b_1b_2} - 24R^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2}{}_{b_2}\overset{2}{R}{}^{b_1b_2} \\
&- 6R^{a_1b_1a_2b_2}\overset{3}{R}_{b_1b_2} + 12R^{a_1b_1a_2b_2}\overset{2}{R}_{b_1b_2}R - 12\overset{2}{R}{}^{a_1}{}_{b_1}\overset{2}{R}{}^{a_2b_1} \\
&- 24R^{a_1}{}_{b_1b_3b_2}R^{a_2b_1b_4b_2}\overset{2}{R}{}^{b_3}{}_{b_4} - 12R^{a_1}{}_{b_3b_1b_2}R^{a_2b_4b_1b_2}\overset{2}{R}{}^{b_3}{}_{b_4} \\
&+ 24R^{a_1}{}_{b_1b_3b_2}R^{a_2b_1b_4b_2}R^{b_3}{}_{b_4}R + 12R^{a_1}{}_{b_3b_1b_2}R^{a_2b_4b_1b_2}R^{b_3}{}_{b_4}R \\
&+ 72R^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2}{}_{b_2}R^{b_1b_2}R - 48R^{a_1}{}_{b_1}R^{a_2}{}_{b_2}R^{b_1b_3}R^{b_2}{}_{b_3} \\
&- 24(R^{a_1}{}_{b_1b_2b_3}R^{a_2b_1b_4b_5} + R^{a_2}{}_{b_1b_2b_3}R^{a_1b_1b_4b_5})R^{b_2b_6}{}_{b_4b_5}R^{b_3}{}_{b_6} \\
&- 48(R^{a_1b_1}{}_{b_3b_4}R^{a_2b_2b_3b_5} + R^{a_2b_1}{}_{b_3b_4}R^{a_1b_2b_3b_5})R_{b_1b_6b_2}{}^{b_4}R_{b_5}{}^{b_6} \\
&+ 48(R^{a_1b_1b_3b_4}R^{a_2}{}_{b_2b_3b_5} + R^{a_2b_1b_3b_4}R^{a_1}{}_{b_2b_3b_5})R_{b_1b_6}R_{b_4}{}^{b_2b_6b_5} \\
&+ 24(R^{a_1}{}_{b_1b_3b_4}R^{a_2}{}_{b_2b_5b_6} + R^{a_2}{}_{b_1b_3b_4}R^{a_1}{}_{b_2b_5b_6})R^{b_7b_1b_3b_2}R_{b_7}{}^{b_4b_5b_6} \\
&+ 6R^{a_1}{}_{b_1b_2b_3}R^{a_2b_1}{}_{b_4b_5}R^{b_2b_3b_6b_7}R^{b_4b_5}{}_{b_6b_7} \\
&+ 48R^{a_1}{}_{b_1b_3b_4}R^{a_2b_2b_3b_5}R^{b_1b_6b_4b_7}R_{b_2b_6b_5b_7} \\
&- 12R^{a_1}{}_{b_1b_3b_4}R^{a_2b_2b_5b_6}R^{b_3b_4}{}_{b_5b_6}R^{b_1}{}_{b_2} \\
&+ 48R^{a_1b_1b_3b_4}R^{a_2b_2b_5b_6}R_{b_3b_5}R_{b_1b_6b_4b_2} \\
&+ 24R^{a_1}{}_{b_1b_3b_4}R^{a_2b_2b_3b_5}R^{b_1}{}_{b_5b_6b_7}R_{b_2}{}^{b_4b_6b_7} \\
&+ 24R^{a_1}{}_{b_1b_2b_3}R^{a_2b_1b_4b_5}R^{b_2}{}_{b_6b_5b_7}R_{b_4}{}^{b_6b_3b_7} \\
&- 48R^{a_1b_1b_3b_4}R^{a_2b_2}{}_{b_3b_5}R_{b_1b_6b_2b_7}R_{b_4}{}^{b_6b_5b_7} \\
&- 48R^{a_1b_1b_4b_3}R^{a_2b_2}{}_{b_5b_6}R^{b_6}{}_{b_1b_7b_3}R_{b_2b_4}{}^{b_7b_5} \\
&+ 24R^{a_1}{}_{b_1b_2b_3}R^{a_2b_1}{}_{b_4b_5}R^{b_2b_4}R^{b_3b_5} \\
&+ 48R^{a_1b_1}{}_{b_3b_4}R^{a_2b_2b_3b_5}R_{b_1b_2}R^{b_4}{}_{b_5}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Dieser Tensor lässt sich auch mit

$$
\begin{aligned}
&\overset{2}{R}{}^{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}, \overset{2}{R}{}^{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} = \overset{2}{R}{}^{a_1a_2a_3b_1a_4a_5a_6}{}_{b_1}, \\
&\overset{2}{R}{}^{a_1a_2a_3a_4} = \overset{2}{R}{}^{a_1a_2b_1a_3a_4}{}_{b_1}, \overset{2}{R}{}^{a_1a_2} = \overset{2}{R}{}^{a_1b_1a_2}{}_{b_1}, \overset{2}{R} = \overset{2}{R}{}^{b_1}{}_{b_1}
\end{aligned}
$$

schreiben als:

$$
\begin{aligned}
\overset{4}{R}{}^{a_1a_2} &= \overset{2}{R}{}^{a_1b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7}\overset{2}{R}{}^{a_2}{}_{b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7} + \overset{2}{R}{}^{a_1a_2}\overset{2}{R} \\
&- 4\overset{2}{R}{}^{a_1b_1}\overset{2}{R}{}^{a_2}{}_{b_1} - 12\overset{2}{R}{}^{a_1b_1a_2b_2}\overset{2}{R}_{b_1b_2} + 18\overset{2}{R}{}^{a_1b_1b_2b_3}\overset{2}{R}{}^{a_2}{}_{b_1b_2b_3} \\
&+ 18\overset{2}{R}{}^{a_1b_1b_2a_2b_3b_4}\overset{2}{R}_{b_1b_2b_3b_4} - 4\overset{2}{R}{}^{a_1b_1b_2b_3a_2b_4b_5b_6}\overset{2}{R}_{b_1b_2b_3b_4b_5b_6} \\
&- 12\overset{2}{R}{}^{a_1b_1b_2b_3b_4b_5}\overset{2}{R}{}^{a_2}{}_{b_1b_2b_3b_4b_5}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Die Divergenzfreiheit dieser Tensoren lässt sich mithilfe der folgenden Identitäten beweisen:

- $\mathcal{D}_{a_3} g_{a_1 a_2} = 0$
- $\mathcal{D}_{a_5} R_{a_1 a_2 a_3 a_4} + \mathcal{D}_{a_4} R_{a_1 a_2 a_5 a_3} + \mathcal{D}_{a_3} R_{a_1 a_2 a_4 a_5} = 0$ (Bianchi-Identität)
- $\mathcal{D}_{a_9} \overset{2}{R}_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} + \mathcal{D}_{a_8} \overset{2}{R}_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_9 a_5 a_6 a_7} + \mathcal{D}_{a_7} \overset{2}{R}_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_8 a_9 a_5 a_6}$
  $+ \mathcal{D}_{a_6} \overset{2}{R}_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_7 a_8 a_9 a_5} + \mathcal{D}_{a_5} \overset{2}{R}_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6 a_7 a_8 a_9} = 0$

Die letzte Identität lässt sich mithilfe der Bianchi-Identität beweisen.

3 Relativistische Feldgleichung der Gravitation

Der metrische Tensor ergibt sich aus der Variation der invarianten Wirkung:

$$\overset{0}{S} = \int d^D q \, 2 \sqrt{g} \tag{17}$$

$d^D q \sqrt{g}$ stellt hier das invariante Volumenelement eines $D = g^{a_0}{}_{a_0}$-dimensionalen Raumes dar, in der g die Determinante des metrischen Tensors bedeutet. Die Komponenten des metrischen Tensors $g_{a_1 a_2}$ stellen die Feldvariablen dar, nach denen variiert wird. Als Variationsergebnis erhalten wir dann aus $\delta \overset{0}{S}$, indem alle auftretenden Variationen durch $\delta g^{a_1 a_2}$ ausgedrückt werden:

$$\delta \overset{0}{S} = \int d^D q \, \delta(2 \sqrt{g}) = \int d^D q \sqrt{g} \, (-g_{a_1 a_2}) \, \delta g^{a_1 a_2} \tag{18}$$

Der Einstein Tensor $G_{a_1 a_2}$ ergibt sich aus der Variation der invarianten Wirkung

$$\overset{1}{S} = \int d^D q \, \sqrt{g} \, R, \tag{19}$$

woraus sich durch Variation

$$\delta \overset{1}{S} = \int d^D q \, \delta(\sqrt{g} \, R) = \int d^D q \sqrt{g} \, G_{a_1 a_2} \, \delta g^{a_1 a_2} \tag{20}$$

ergibt. Im Variationsergebnis (20) für die Wirkung $\overset{1}{S}$ können keine Ableitungen dritter und vierter Ordnung des metrischen Tensors $g_{a_1 a_2}$ auftauchen, weil der Krümmungsskalar R die Ableitungen zweiter Ordnung linear enthält.

Der divergenzfreie Tensor $\overset{2}{G}_{a_1 a_2}$ ergibt sich aus der Variation der invarianten Wirkung:

$$\overset{2}{S} = \int d^D q \, \frac{1}{2} \, \sqrt{g} \, \overset{2}{R} \tag{21}$$

Anders als die Wirkung $\overset{1}{S}$ enthält die Wirkung $\overset{2}{S}$ die zweiten Ableitungen nicht linear, aber bei der Ausführung der Variation stellt sich hier heraus, dass sich alle Ableitungen dritter und vierter Ordnung des metrischen Tensors gegenseitig wegheben, so dass im Variationsergebnis keine Ableitungen höherer, als der zweiten Ordnung mehr auftauchen. Als Variationsergebnis ergibt sich daraus:

$$\delta \overset{2}{S} = \int d^D q \, \frac{1}{2} \, \delta(\sqrt{g} \, \overset{2}{R}) = \int d^D q \sqrt{g} \, \overset{2}{G}_{a_1 a_2} \, \delta g^{a_1 a_2} \tag{22}$$

Allemein für die Wirkung

$$\overset{k}{S} = \int d^D q \sqrt{g}\, \frac{1}{k}\, \overset{k}{R} \tag{23}$$

ergibt sich als Variationsergebnis:

$$\delta \overset{k}{S} = \int d^D q\, \frac{1}{k}\, \delta(\sqrt{g}\, \overset{k}{R}) = \int d^D q \sqrt{g}\, \overset{k}{G}_{a_1 a_2}\, \delta g^{a_1 a_2} \tag{24}$$

Damit lässt sich eine Wirkung S mit irgendwelchen Konstanten $\overset{k}{\lambda}$ schreiben als

$$S = \sum_{k=0}^{n} \overset{k}{\lambda}\, \overset{k}{S}, \tag{25}$$

woraus sich durch das Variationsprinzip $\delta S = 0$ eine relativistische Feldgleichung der Gravitation ergibt:

$$0 = -\overset{0}{\lambda}\, g^{a_0 b_0} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overset{k}{\lambda}}{2\,k} \begin{vmatrix} g^{a_0 b_0} & \dots & g^{a_0 b_{2k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{a_{2k} b_0} & \dots & g^{a_{2k} b_{2k}} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{2} R_{a_{2\,l-1} a_{2\,l} b_{2\,l-1} b_{2\,l}} \tag{26}$$

4 Vielweltenformel

Die in der Feldgleichung (26) enthaltenen Konstanten $\overset{k}{\lambda}$ sollen nun so eingeschränkt sein, dass mehrere Dimensionsbereiche möglich sind, die unabhängig voneinander und orthogonal zueinander existierende abgeschlossene Systeme darstellen, in denen der jeweils zu diesen Dimensionsbereichen zugeordnete metrische Tensor $g_{a_1 a_2}$ nur von den Koordinaten und Indizes seines eigenen Dimensionsbereichs abhängt. Diese Dimensionsbereiche wollen wir Dimensionszellen nennen. Dazu zerlegen wir den metrischen Tensor $g_{a_1 a_2}$ in zwei Teilbereiche $g'_{a'_1 a'_2}$ und $g''_{a''_1 a''_2}$, die jeweils nur von den Koordinaten und Indizes des eigenen Dimensionsbereichs abhängen, so dass wir den metrischen Tensor $g_{a_1 a_2}$ schreiben können als:

$$g_{a_1 a_2}(q^{a_3}) = g'_{a_1 a_2}(q'^{a'_3}) + g''_{a_1 a_2}(q''^{a''_3}) = \begin{pmatrix} g'_{a'_1 a'_2}(q'^{a'_3}) & 0 \\ 0 & g''_{a''_1 a''_2}(q''^{a''_3}) \end{pmatrix} \tag{27}$$

In der Feldgleichung (26) sind dann nur diejenigen Konstanten $\overset{k}{\lambda}$ erlaubt, für dass unter dieser Bedingung diese Feldgleichung konsistent wird. Dazu werden wir hier einen Dimensionsbereich betrachten, für dass die Dimensionsanzahl $g^{a_0}{}_{a_0} \leq 10$ ist, so dass sich die Feldgleichung (26) wegen (6) zu

$$0 = -\overset{0}{\lambda}\, g_{a_1 a_2} + \overset{1}{\lambda}\, G_{a_1 a_2} + \overset{2}{\lambda}\, \overset{2}{G}_{a_1 a_2} + \overset{3}{\lambda}\, \overset{3}{G}_{a_1 a_2} + \overset{4}{\lambda}\, \overset{4}{G}_{a_1 a_2} \tag{28}$$

reduziert. Im folgenden gehören die einfach gestrichenen Größen zum Dimensionsbereich zu der auch $g'_{a'_1 a'_2}$ gehört, und die doppelt gestrichenen Größen zum Dimensionsbereich zu der auch $g''_{a''_1 a''_2}$ gehört. Da beide Dimensionsbereiche äquivalent sind, brauchen wir die Feldgleichungen nur in einem der beiden Dimensionsbereiche zu untersuchen. Im folgenden wird das der einfach gestrichene Dimensionsbereich sein. Zerlegen wir den metrischen Tensor $g_{a_1 a_2}$ unter der Bedingung (27), dann erhalten wir aus der Feldgleichung (28):

$$
\begin{aligned}
0 = &-(\overset{0}{\lambda} + \frac{1}{2}\overset{1}{\lambda}\overset{1}{R''} + \frac{1}{4}\overset{2}{\lambda}\overset{2}{R''} + \frac{1}{6}\overset{3}{\lambda}\overset{3}{R''} + \frac{1}{8}\overset{4}{\lambda}\overset{4}{R''})\, g'_{a'_1 a'_2} \\
&+ (\overset{1}{\lambda} + \overset{2}{\lambda}R'' + \overset{3}{\lambda}\overset{2}{R''} + \overset{4}{\lambda}\overset{3}{R''})\, G'_{a'_1 a'_2} + (\overset{2}{\lambda} + 2\,\overset{3}{\lambda}R'' + 3\,\overset{4}{\lambda}\overset{2}{R''})\,\overset{2}{G'}_{a'_1 a'_2} \\
&+ (\overset{3}{\lambda} + 3\,\overset{4}{\lambda}R'')\,\overset{3}{G'}_{a'_1 a'_2} + \overset{4}{\lambda}\,\overset{4}{G'}_{a'_1 a'_2}
\end{aligned}
$$

Um diese Gleichung konsistent zu machen, müssen wir die Konstanten $\overset{0}{\lambda}, \overset{1}{\lambda}, \overset{2}{\lambda}, \overset{3}{\lambda}, \overset{4}{\lambda}$ so wählen, dass sich der Teil abseparieren lässt, der von den doppelt gestrichenen Koordinaten abhängt. Dies ist aber nur möglich, wenn die Konstanten die Werte

$$
\overset{1}{\lambda} = \mu\,\overset{0}{\lambda},\ \overset{2}{\lambda} = \frac{1}{2}\,\mu^2\,\overset{0}{\lambda},\ \overset{3}{\lambda} = \frac{1}{8}\,\mu^3\,\overset{0}{\lambda},\ \overset{4}{\lambda} = \frac{1}{48}\,\mu^4\,\overset{0}{\lambda}
$$

annehmen, wobei μ eine Konstante ist. Daraus erhalten wir nämlich dann unter Ausnutzung von (6):

$$
\begin{aligned}
0 = &(1 + \frac{1}{2}\mu\, R'' + \frac{1}{8}\mu^2\overset{2}{R''} + \frac{1}{48}\mu^3\overset{3}{R''} + \frac{1}{384}\mu^4\overset{4}{R''}) \\
&\cdot(-g'_{a'_1 a'_2} + \mu\, G'_{a'_1 a'_2} + \frac{1}{2}\,\mu^2\,\overset{2}{G'}_{a'_1 a'_2} + \frac{1}{8}\,\mu^3\,\overset{3}{G'}_{a'_1 a'_2} + \frac{1}{48}\,\mu^4\,\overset{4}{G'}_{a'_1 a'_2})
\end{aligned}
$$

Aus der ursprünglichen Feldgleichung erhalten wir somit eine vielweltentaugliche Feldgleichung für ${g^{a_0}}_{a_0} \leq 10$:

$$
0 = -g_{a_1 a_2} + \mu\, G_{a_1 a_2} + \frac{1}{2}\,\mu^2\,\overset{2}{G}_{a_1 a_2} + \frac{1}{8}\,\mu^3\,\overset{3}{G}_{a_1 a_2} + \frac{1}{48}\,\mu^4\,\overset{4}{G}_{a_1 a_2} \tag{29}
$$

Allgemein für ${g^{a_0}}_{a_0} \leq \infty$, dass eine solche Zerlegung des metrischen Tensors erlaubt, lautet die vielweltentaugliche Feldgleichung:

$$
0 = -g^{a_0 b_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \begin{vmatrix} g^{a_0 b_0} & \cdots & g^{a_0 b_{2\,n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{a_{2\,n} b_0} & \cdots & g^{a_{2\,n} b_{2\,n}} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^{n} \frac{\mu}{4\,l}\, R_{a_{2\,l-1} a_{2\,l} b_{2\,l-1} b_{2\,l}} \tag{30}
$$

Diese Gleichung erlaubt die Existenz von einer beliebigen Anzahl orthogonal existierender Dimensionszellen, die sich ja über die Gravitation nicht gegenseitig beeinflussen können. Die Eigenschaften dieser Gleichung erinnert an eine Exponentialfunktion, die sich ja durch die Reihe

$$
e^{\alpha\,x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n} \frac{\alpha\,x}{l}
$$

darstellen lässt.
Betrachten wir nun die Wirkung $S = \int d^D q\, 2\,\sqrt{g}\,\mathcal{L}$, mit

$$
\mathcal{L} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{vmatrix} g^{a_1 b_1} & \cdots & g^{a_1 b_{2\,n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{a_{2\,n} b_1} & \cdots & g^{a_{2\,n} b_{2\,n}} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^{n} \frac{\mu}{4\,l}\, R_{a_{2\,l-1} a_{2\,l} b_{2\,l-1} b_{2\,l}}, \tag{31}
$$

dessen Variation zu der vielweltentauglichen Feldgleichung (30) führt, dann stellen wir fest, dass die in der Wirkung S stehende invariante Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ die selbe Gestalt hat, wie der Skalar, der sich durch die Vielweltenzerlegung dieser vielweltentauglichen Feldgleichung abseparieren lässt. Dieser Skalar hat den Charakter einer Exponentialfunktion, so dass er sich durch die Vielweltenzerlegung zu einem Produkt aus Skalaren der selben Gestalt zerlegen lässt, von denen jeder Skalar jeweils dem Dimensionsbereich einer Dimensionszelle zugeordnet ist. Da sich auch das invariante Volumenelement $d^D q \sqrt{g}$ durch die Vielweltenzerlegung zu einem Produkt aus invarianten Volumenelementen der selben Gestalt zerlegen lässt, von denen jedes Volumenelement jeweils dem Dimensionsbereich einer Dimensionszelle zugeordnet ist, lässt sich somit auch für jede einzelne Dimensionszelle eine Wirkung S zuordnen, die dann nur Größen enthält, die dem Dimensionsbereich dieser Dimenionszelle zugeordnet sind, und durch dessen Variation nach den für diese Dimensionszellen zugeordneten metrischen Tensoren $g_{a_1 a_2}$, die für diese Dimensionszellen zugeordneten Feldgleichungen ergeben.